УДК 517.956

Е. А. Калита

УСТРАНИМЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Для эллиптических систем высокого порядка вводится аналог условия Кордеса. Получен следующий результат: если вблизи особой точки скорость роста решения меньше некоторой предельной скорости, определяемой показателем кордесовости системы, то особая точка устранима.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, рассмотрим эллиптическую систему

$$A^i(x, \delta^{2m}u) = 0, \quad i = \overline{1,N}, \tag{1}$$

$\delta^{2m}u = \{D^\alpha u^i : |\alpha| \leqslant 2m, \ i = \overline{1, N}\}$. Коэффициенты системы измеримы и удовлетворяют следующему аналогу условия Кордеса:

$$\sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{|\alpha|=m} \xi^i_{2\alpha} - \varkappa^i(x) A^i(x, \xi) \right|^2 \leqslant K |\xi_{2m}|^2 + f^2(x), \tag{2}$$

$K < 1$, $\varkappa^i > 0$, $|\xi_{2m}|^2 = \sum\limits_{|\alpha|=2m} |\xi_\alpha|^2$, $f \in L_2$. Чтобы не вводить полиномиальные коэффициенты, мультииндексы считаем упорядоченными, так что $\Delta^m u = \sum\limits_{|\alpha|=m} D^{2\alpha}u$. Для квазилинейного уравнения

$$\sum_{|\alpha|=2m} A_\alpha(x) D^\alpha u = A(x, \delta^{2m-1}u)$$

наименьшее значение K (при различных $\varkappa$) равно

$$K = \sup_x \left\{ n^m - \left(\sum_{|\alpha|=m} A_{2\alpha} \right)^2 \Big/ \sum_{|\alpha|=2m} A^2_\alpha \right\}.$$

В частности, для уравнения второго порядка условие $K < 1$ совпадает с условием Кордеса [1].

Рассмотрим решения системы (1) $u \in (W_2^{2m})^N$ (для краткости будем писать W_2^{2m}). Для точки $x_0 \in \Omega$ и полинома P обозначим $\|P\| = \sum\limits_\alpha |D^\alpha P(x_0)|$. Обозначим $a^* = (\sqrt{nK^{-1/m} - 1} - \sqrt{n-1})^2 (K^{-1/m} - 1)^{-1}$ — корень уравнения $M^{-m}(a) = K$, где $M(a) = 1 + 4a \frac{n-1}{(n-a)^2}$ — монотонная выпуклая на $(0, n)$ функция, $M(0) = 1$, $M(n) = +\infty$. Происхождение функции $M(a)$ объясняет лемма 2.

Теорема. Пусть $x_0 \in \Omega$, $u \in W^{2m}_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \setminus x_0)$ — решение (1), такое, что для некоторого семейства полиномов $P_\delta = (P^1_\delta, \ldots, P^N_\delta)$, $\deg P_\delta < 2m$, $\|P_\delta\| < c$ выполнено

$$\liminf_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{N} \delta^{a^* - 4m} \int\limits_{\delta < |x - x_0| < 2\delta} |u^i - P^i_\delta|^2 dx = 0.$$

Тогда $u \in W_2^{2m}(\Omega)$.

Обозначим $B_\rho = \{x : r < \rho\}$, $r = |x - x_0|$, $\|u\|_{\omega,G} = \left(\int\limits_G |u|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2}$, при $\omega = 1$ соответствующий индекс опускаем. Буквой c будем обозначать различные несущественные константы.

Лемма 1. Пусть u — решение (1) в $B_\rho \setminus x_0$. Пусть $0 < \rho_1 < \ldots \rho_4 < \rho$, $1 < c_1 < \rho_{j+1} / \rho_j < c_2$. Тогда для любого полинома P, $\deg P < 2m$,

$$\|D^{2m}u\|^2_{B_{\rho_3} \setminus B_{\rho_2}} \leqslant c (\rho_1^{-4m} \|u - P\|^2 + F)_{B_{\rho_4} \setminus B_{\rho_1}},$$

где $F_G = \|f\|^2_G$, константа c зависит только от c_1, c_2, K, m, n.

Доказательство. Запишем систему (1) в виде

$$\Delta^m u^i = \Delta^m u^i - \varkappa^i A^i(x, \delta^{2m}u).$$

Возводя в квадрат, по условию (2) получаем

$$|\Delta^m u|^2 \leqslant K |D^{2m}u|^2 + f^2(x). \tag{3}$$

Понятно, что вместо u в (3) можно подставить $u - P$. Обозначим $R^0 = \rho_2$, $R^{j+1} = R^j - (\rho_2 - \rho_1)(1 - \sigma)\sigma^j$, $R_0 = \rho_3$, $R_{j+1} = R_j + (\rho_4 - \rho_3) \times (1 - \sigma)\sigma^j$, $\sigma < 1$, B^j, B_j — шары радиусов R^j, R_j. Определим срезающую функцию $\varphi_j \in \overset{0}{C}{}^\infty(B_{j+1} \setminus B^{j+1})$, $\varphi_j|_{B_j \setminus B^j} = 1$, $|D^k \varphi_j| \leqslant c_k \sigma^{-kj}$.

Проинтегрируем (3) с весом φ_j. Интегрируя по частям в левой части, получаем с некоторым $q<1$

$$\|D^{2m}u\|^2_{B_j\setminus B^j}\leqslant (q\|D^{2m}u\|^2+c\sigma^{-4mj}\|u\|^2+cF)_{B_{j+1}\setminus B^{j+1}},$$

где члены, содержащие производные φ, оценены по интерполяционному неравенству. Итерируя по j, находим

$$\|D^{2m}u\|^2_{B_0\setminus B^0}\leqslant c\sum_{j=0}^{\infty} q^j(\sigma^{-4mj}\|u\|^2_{B_\infty\setminus B^\infty}+F_{B_\infty\setminus B^\infty}).$$

Выбирая σ так, что $\sigma^{4m}>q$, получаем утверждение леммы.

Обозначим $\omega(x)=\begin{cases} r^b, & r\geqslant\tau,\\ \tau^{b-a}r^a, & r\leqslant\tau,\end{cases}$ $0<\tau<\frac{\rho}{2}$. Выберем срезающую функцию φ так, что $\varphi=0$ вне $B_{\frac{5}{6}\rho}\setminus B_{\frac{4}{3}\delta}$, $\varphi=1$ в $B_{\frac{2}{3}\rho}\setminus B_{\frac{5}{3}\delta}$ с естественной оценкой производных φ.

Лемма 2. Пусть $u\in W^2_{2,\mathrm{loc}}(\bar B_\rho\setminus x_0)$. Тогда в случаях 1) $n\geqslant 3$, $0\leqslant b<a<n$; 2) $n=2$, $0<b\,(a)<b<a<2$; 3) $n=2$, $b=0<a<2$

$$\|D^2u\|^2_{\omega\varphi}+c_{ab}\|r^{-1}Du\|^2_{\omega\varphi,B_\rho\setminus B_\tau}\leqslant M(a)\|\Delta u\|^2_{\omega\varphi}+Q,$$

$Q=c\|r^{-1}Du\|^2_{\omega,\mathrm{supp}D\varphi}$, причем в 1) и 2) $c_{ab}>0$, в 3) $c_{ab}=0$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть гладкие u. Интегрируя по частям и переходя в полярную систему координат, находим

$$\|D^2u\|^2_{\omega\varphi}-\|\Delta u\|^2_{\omega\varphi}=\int(|Du|^2\Delta(\omega\varphi)-D_iuD_juD^2_{ij}(\omega\varphi))\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\int_0^\rho\tilde a\left((n-1)u'^2+\lambda(\tilde a+n-3)\frac{u^2}{r^2}\right)\omega\varphi r^{n-3}dr+\right.$$

$$\left.+(b-a)\lambda u^2(\tau)\tau^{b+n-4}\right\}+Q, \tag{4}$$

где $u_{kj}(r)$ — коэффициенты разложения u по полной ортонормированной системе сферических функций $\{Y_{kj}(\theta)\}$ (индекс j указывает кратность), $\lambda_k=k(k+n-2)$ — собственные числа оператора Бельтрами на единичной сфере, индексы для краткости опущены, штрих означает дифференцирование по r, $\tilde a=\frac{r\omega'}{\omega}=\begin{cases} b, & r>\tau,\\ a, & r<\tau.\end{cases}$ Имеем также

$$\|\Delta u\|^2_{\omega\varphi}\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\int_0^\rho\left[u''^2+((n-1)(1-\tilde a)+2\lambda)\frac{u'^2}{r^2}+\lambda(\lambda+(2-\tilde a)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\tilde a+n-4))\frac{u^2}{r^4}\right]\omega\varphi r^{n-1}dr+(a-b)\lambda u^2(\tau)\tau^{b+n-4}\right\}-Q. \tag{5}$$

Для оценки членов, содержащих производные φ, мы использовали равенство

$$\|Du\|^2_{\omega,B_\rho}=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^\rho\left(u'^2+\lambda\frac{u^2}{r^2}\right)\omega r^{n-1}dr,$$

справедливое для радиальных весов $\omega(r)$. Нам понадобится неравенство Харди в виде

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2}u'^2\omega r\,dr\geqslant\int_{\rho_1}^{\rho_2}u^2c\left(\omega'-c\frac{\omega}{r}\right)dr-cu^2\omega\Big|_{\rho_1}^{\rho_2},\quad c\in\mathbb{R}.$$

Применяя его в (5) к первому члену при $c=\frac{a+n-2}{2}$, к члену $2\lambda u'^2$ при

$c = \frac{a+n-4}{2}$ на $(0, \tau)$ и при $c = \frac{b+n-4}{2}$ на (τ, ρ), получаем

$$\|\Delta u\|^2_{\omega\varphi} \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \tau^{b-a} \int_0^{\tau} \left[\left(\frac{n-a}{2}\right)^2 u'^2 + \lambda\left(\lambda + (n-a)\frac{a+n-4}{2}\right)\frac{u^2}{r^2}\right] \times \right.$$

$$\times r^{a+n-3}\varphi dr + \int_{\tau}^{\rho} \left[\frac{n-a}{2}\,\frac{n+a-2b}{2}\, u'^2 + \right.$$

$$\left. \left. + \lambda\left(\lambda + (n-b)\frac{b+n-4}{2}\right)\frac{u^2}{r^2}\right] r^{b+n-3}\varphi dr \right\} - Q.$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты здесь и в (4), получаем нужную оценку во всех случаях, кроме 3) при $k=1$. В 3) при $k=1$, применяя неравенство Харди в (5) к u'^2 при $c=-1$ на (τ, ρ), находим

$$\|\Delta(u_1 Y_1)\|^2_{\omega\varphi} \geqslant (3-a)\left\{ \tau^{-a} \int_0^{\tau} \left(u_1'^2 + (a-1)\frac{u_1^2}{r^2}\right) r^{a-1}\varphi dr - u_1^2(\tau)\,\tau^{-2}\right\} - Q,$$

где Y_1 — сферическая функция порядка 1. Сравнивая соответствующие коэффициенты здесь и в (4), завершаем доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Положим в определении ω $a = a^*$, $b \in [0, a)$ (при $n=2$ $b \in (b(a), a)$). Пусть $\rho < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Срезающую функцию φ выберем так, как в лемме 2. Проинтегрируем (3) с весом $\omega\varphi$ (вместо $u - P_\delta$ для краткости пишем u):

$$\|\Delta^m u\|^2_{\omega\varphi} \leqslant K\|D^{2m}u\|^2_{\omega\varphi} + F_{B_\rho}.$$

В левой части по лемме 2 находим

$$\|\Delta^m u\|^2_{\omega\varphi} \geqslant M^{-m}(a^*)\|D^{2m}u\|^2_{\omega\varphi} + c_{ab}\left\|\frac{D^{2m-1}u}{r}\right\|^2_{\omega\varphi, B_\rho\setminus B_\delta} -$$

$$- c\tau^{b-a^*}\delta^{a^*-2}\|D^{2m-1}u\|^2_{B_{\frac{5}{3}\delta}\setminus B_{\frac{4}{3}\delta}} - \mathrm{ibid}_\rho.$$

Учитывая $M^{-m}(a^*) = K$ и оценивая члены, входящие в Q, по интерполяционному неравенству и лемме 1 получаем

$$\left\|\frac{D^{2m-1}u}{r}\right\|^2_{\omega\varphi, B_\rho\setminus B_\tau} \leqslant c\tau^{b-a^*}\delta^{a^*-4m}\|u\|^2_{B_{2\delta}\setminus B_\delta} + \mathrm{ibid}_\rho + cF. \tag{6}$$

При $\delta \to 0$ по условию теоремы находим

$$\left\|\frac{D^{2m-1}u}{r}\right\|^2_{\omega\varphi, B_\rho\setminus B_\delta} \leqslant c\left(\rho^{b-4m}\|u\|^2_{B_\rho\setminus B_{\rho/2}} + F\right).$$

При $\tau \to 0$ получаем $\|D^{2m-1}u\|_{r^{b-2}} < \infty$, откуда по абсолютной непрерывности интеграла $\delta^{b-2}\|D^{2m-1}u\|^2_{B_{2\delta}\setminus B_\delta} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Пусть теперь $\omega = \begin{cases} 1, & r \geqslant \tau, \\ (r/\tau)^b, & r \leqslant \tau \end{cases}$. Повторяя предыдущие рассуждения и учитывая $M^{-m}(b) > K$, вместо (6) находим

$$(M^{-m}(b) - K)\|D^{2m}u\|^2_{\omega\varphi} \leqslant c\tau^{-b}\delta^{b-2}\|D^{2m-1}u\|^2_{B_{2\delta}\setminus B_\delta} + \mathrm{ibid}_\rho + cF.$$

Отсюда, устремляя $\delta \to 0$ и потом $\tau \to 0$, получаем $D^{2m}u \in L_2$.

1. *Cordes H. O.* Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen // Math. Ann.— 1956.— 131, N 3.— P. 278—312.

Ин-т прикл. математики
и механики АН Украины, Донецк

Получено 05.06.90